



Internationales Symposion INTERPRAEVENT 2004 - RIVA / TRIENT

MODELLO MATEMATICO E NUMERICO BIDIMENSIONALE PER LO STUDIO DELLE VALANGHE DI NEVE DENSA

TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODEL FOR THE DYNAMICS OF GRANULAR AVALANCHES.

Stefano De Toni¹, Paolo Scotton² e Enrico Bertolazzi³

ABSTRACT

Il modello descritto nel presente articolo simula il movimento e l'arresto delle valanghe di neve densa a partire dalla conoscenza della topografia del terreno e del volume, della geometria e della posizione della massa nevosa che si mette in movimento. Rifacendosi alla teoria di Hutter e Savage, la massa granulare, descritta come un continuo incompressibile e privo di coesione, viene caratterizzata da una legge d'attrito al fondo di tipo Coulombiano e da un criterio di rottura interno alla Mohr - Coulomb. I due soli parametri del modello da tarare sono l'angolo d'attrito interno ϕ e l'angolo d'attrito al fondo δ . Le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto, semplificate nell'ipotesi di "acque basse", vengono mediate lungo la verticale. In direzione normale al fondo si ricava una legge di distribuzione idrostatica delle pressioni che tiene conto degli effetti di curvatura. Il modello numerico è testato con prove di laboratorio eseguite rilasciando diversi volumi di materiale granulare secco su di una superficie costituita da due piani a pendenza regolabile.

Key words: valanghe di neve densa, dinamica dei mezzi granulari secchi, reologia coulombiana.

ABSTRACT

This paper is concerned with a model which reproduces the dynamic of avalanches from initiation to runout, given the terrain topography and the volume, shape and position of the initial mass. According to the Savage - Hutter theory, the granular avalanche is treated as an incompressible cohesionless continuum, assumed to satisfy a Mohr - Coulomb yield criterion and with a Coulomb-type friction law at the bottom. The internal and bottom frictional angles, ϕ and δ , are the only parameters to be set. The balance laws of mass and momentum are

1 Dottorando, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università degli Studi di Trento, via Mesiano, 77, 38050 Trento, Italy (Tel.: +39 461 882623; Fax: +39 461 882672; email: stefano.detoni@ing.unitn.it)

2 Ricercatore, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università degli Studi di Trento, via Mesiano, 77, 38050 Trento, Italy (Tel.: +39 461 882603; Fax: +39 461 882672; email: paolo.scotton@ing.unitn.it)

3 Ricercatore confermato, Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale, Università degli Studi di Trento, via Mesiano, 77, 38050 Trento, Italy (Tel.: +39 461 882590; Fax: +39 2 700544273; email: enrico.bertolazzi@ing.unitn.it)

simplified imposing the shallowness assumption and then averaged in the vertical direction. The momentum - balance law in the bottom normal direction reduces to the hydrostatic distribution of pressure, in a form which includes the effects of curvature. The numerical model is validated by laboratory experiments performed releasing different volumes of dry granular material on a surface made up of two inclined planes with adjustable slopes.

Key words: granular avalanches, rapid granular flow, Mohr - Coulomb rheology

INTRODUZIONE

Per pianificare correttamente lo sviluppo degli insediamenti e gli eventuali interventi di protezione in un sito valanghivo è necessaria una conoscenza approfondita degli eventi che possono verificarsi. In particolare è importante ottenere delle informazioni il più possibile attendibili sulla frequenza, l'intensità, i volumi che possono essere movimentati, le zone di scorrimento e di deposito e le forze di impatto sulle strutture.

Uno strumento di indagine molto utile è rappresentato dai modelli matematici che studiano la dinamica delle valanghe. Data la topografia e la scabrezza del pendio e caratterizzando statisticamente l'iniziale massa nevosa (volumi, collocazione sul pendio, proprietà del materiale) tali modelli consentono di ricostruire diversi possibili scenari di moto della valanga e forniscono una stima dei parametri dinamici della massa in movimento, della configurazione del deposito finale, delle forze di impatto su eventuali strutture che ostacolano la discesa dell'ammasso.

Per studiare il moto delle valanghe di neve densa sono già stati realizzati in passato vari modelli di moto vario in una dimensione. Savage e Hutter hanno proposto ad esempio un modello, scritto rispetto ad un riferimento curvilineo legato alla geometria del pendio (Savage e Hutter, 1991). La neve viene trattata come un mezzo continuo, incomprimibile, caratterizzato da un comportamento reologico di tipo Coulombiano e da un flusso con un profilo di velocità normale al fondo pressoché uniforme (plug - flow). Viene inoltre imposta l'ipotesi di "acqua bassa".

In questo modello ci sono varie semplificazioni. Si suppone che non vi sia acqua tra le particelle e che quindi non vi siano comportamenti viscosi. Non vengono presi in considerazione gli aspetti termodinamici del processo. Durante lo scorrimento della valanga si genera calore per attrito al fondo e i flussi di energia associati possono modificare le caratteristiche del materiale granulare. Non si considerano alcuni fondamentali processi che si realizzano negli istanti iniziali, tra cui il processo di granulazione che determina la progressiva frantumazione dei lastroni, e la successiva formazione di palle di neve di varia granulometria, e l'effetto di dilatazione e fluidizzazione, con rapido incremento della distanza media tra le particelle, che si realizza nei primissimi istanti. Infine vengono trascurate le variazioni di massa lungo il percorso, indotte da depositi e erosioni.

D'Accordi ha eseguito delle verifiche di laboratorio di un modello basato sulla reologia proposta da Hutter e Savage. Quindi ne ha testato il funzionamento su un caso reale (D'Accordi, 1999).

Il modello monodimensionale è adatto a descrivere il moto delle valanghe incanalate. Non è in grado di rappresentare con dettaglio il comportamento delle valanghe di versante e di quelle incanalate quando sboccano sul conoide. Di qui l'esigenza di sviluppare un modello bidimensionale. Lo schema concettuale alla base di questo lavoro è rappresentato ancora dalla teoria di Hutter e Savage, per mezzi granulari secchi. Gli stessi autori hanno elaborato un

modello bidimensionale valido sul piano o su superfici che poco si discostano dalla geometria piana (Hutter et al., 1993).

Quando la geometria del pendio diviene più articolata, è problematico lavorare con un riferimento curvilineo legato al fondo, come si è potuto fare nel caso monodimensionale. Le equazioni si complicano e non si riesce a trovare una relazione semplice che leghi coordinate assolute e coordinate curvilinee. Si è pensato perciò di scrivere il modello in coordinate assolute. Questo passaggio ha richiesto delle ulteriori semplificazioni rispetto al modello originario di Hutter e Savage.

IL MODELLO MATEMATICO E NUMERICO BIDIMENSIONALE.

Le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto utilizzate sono le tipiche equazioni dell'idrodinamica dei continui incomprimibili. In forma vettoriale:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho (\mathbf{u}_{,t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2)$$

essendo \mathbf{u} il vettore velocità, ρ la densità costante, \mathbf{f} la forza esterna di volume, cioè la forza di gravità $\rho \mathbf{g}$, \mathbf{P} il tensore degli sforzi, t il tempo.

Definite le equazioni del fondo (supposto fisso) e della superficie libera $\Phi_b(\mathbf{x}) = z - b(x,y) = 0$ e $\Phi_f(\mathbf{x},t) = z - f(x,y,t) = 0$, le condizioni al contorno di tipo cinematico danno rispettivamente:

$$\nabla \Phi_b = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \cdot \nabla \Phi_f = 0, \quad (3)$$

dove \mathbf{x} è il vettore posizione e \mathbf{u}_b e \mathbf{u}_f i vettori velocità al fondo ed in superficie libera rispettivamente.

Si suppone che lo sforzo in superficie libera sia nullo mentre al fondo vi sia slittamento con un'interazione tra neve e terreno di tipo coulombiano, caratterizzato da un angolo d'attrito pari a δ . Le condizioni al contorno di tipo dinamico assumono perciò la forma:

$$\mathbf{P}_b \mathbf{n}_b - \mathbf{n}_b (\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{P}_b \mathbf{n}_b) = -(\mathbf{u}_b / |\mathbf{u}_b|) \tan \delta (\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{P}_b \mathbf{n}_b) \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_f \mathbf{n}_f = \mathbf{0} \quad (4)$$

dove i versori normali al fondo e in superficie libera sono $\mathbf{n}_b = \nabla \Phi_b / |\nabla \Phi_b|$ e $\mathbf{n}_f = \nabla \Phi_f / |\nabla \Phi_f|$, \mathbf{P}_n è lo sforzo sulla superficie di normale \mathbf{n} , $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_n)$ la sua componente normale alla superficie e $\mathbf{P}_n - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_n)$ la componente tangenziale.

La distribuzione idrostatica delle pressioni.

Le equazioni del moto, scritte in un opportuno sistema di riferimento curvilineo non ortonormale e semplificate nell'ipotesi di "acque basse" restituiscono la distribuzione idrostatica delle pressioni in direzione normale al fondo. Il sistema di riferimento scelto ha asse ζ normale al fondo, mentre le linee coordinate ξ ed η si sviluppano lungo la superficie del pendio ortogonalmente all'asse y e all'asse x del riferimento assoluto (si veda Fig. 1).

Le equazioni vengono sviluppate sfruttando gli strumenti messi a disposizione dall'analisi tensoriale (Simmonds, 1982).

L'equazione di conservazione della quantità di moto nella direzione ζ viene adimensionalizzata introducendo dei valori scala per le grandezze caratteristiche del fenomeno: L_s per le dimensioni dell'ammasso nelle direzioni x, y, ξ e η , H_s per lo spessore del manto nevoso, P_s per i termini di pressione, T_s per i tempi, U_s per le velocità lungo il pendio e $U_{\zeta s}$ per la velocità in direzione normale. Si suppone che il massimo dislivello sul quale si sviluppa la massa di neve sia confrontabile con L_s , (la cosa è ragionevole pensando alle

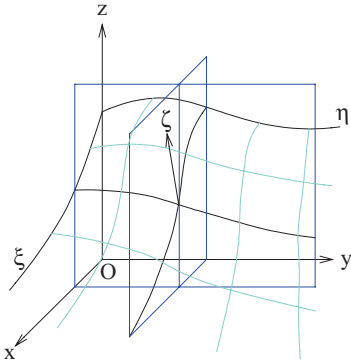


Fig. 1: Sistemi di riferimento assoluto e curvilineo.
Fig. 1: Absolute and curvilinear coordinate system.

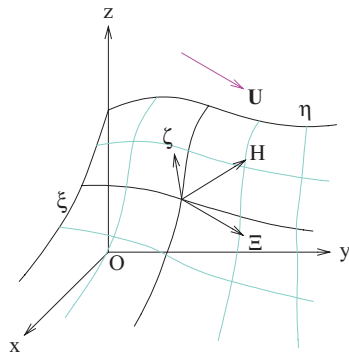


Fig. 2: Sistema di riferimento locale legato al vettore velocità.
Fig. 2: Local coordinate system relevant to velocity vector.

pendenze tipiche del fenomeno studiato). Si suppone che il rapporto $\varepsilon = H_s/L_s$ sia piccolo e che sia $T_s \approx L_s/U_s \approx H_s/U_{\zeta s}$, e che quindi $U_{\zeta s} \approx \varepsilon U_s$. Infine si fa l'ipotesi che i termini di pressione e le forze inerziali abbiano lo stesso peso della gravità $P_s \approx \rho g H_s$ e $U_s^2 \approx g L_s$. Se si integra, imponendo che il profilo di velocità sia uniforme in direzione normale al fondo, si ottiene che il valore della pressione al fondo è:

$$(p^{\zeta\zeta})_b = -\frac{\rho h}{\sqrt{1+b_x^2+b_y^2}} \left(g + \frac{b_{,xx}}{1+b_x^2} (U^{(\xi)})^2 + \frac{b_{,xy}}{\sqrt{1+b_x^2}\sqrt{1+b_y^2}} U^{(\xi)}U^{(\eta)} + \frac{b_{,yy}}{1+b_y^2} (U^{(\eta)})^2 \right) \quad (5)$$

dove $U^{(\xi)}$ e $U^{(\eta)}$ rappresentano i valori medi delle componenti fisiche del vettore velocità lungo la normale. Il profilo delle pressioni lungo la normale risulta lineare:

$$p^{\zeta\zeta} = (p^{\zeta\zeta})_b \left(1 - \frac{\zeta}{h} \right) = \rho A \left(1 - \frac{\zeta}{h} \right) \quad (6)$$

La chiusura alla Mohr - Coulomb.

Per definire le altre componenti del tensore degli sforzi, viene fatta l'ipotesi che vi sia scivolamento rispetto al fondo e che lo sforzo tangenziale con cui il terreno frena la neve sia descrivibile con un legge frizionale di tipo Coulombiano. Si suppone inoltre che la neve si trovi in condizioni di rottura. Il criterio di rottura utilizzato è quello di Mohr - Coulomb. Si assume che all'interfaccia tra neve e terreno, il cerchio di Mohr tangente all'involuppo di rottura sia quello che descrive lo stato di sforzo nel piano contenente la normale al fondo ed il vettore velocità. In quest'ottica risulta opportuno definire il tensore degli sforzi rispetto ad un nuovo riferimento cartesiano, ortogonale, di coordinate Ξ , H e ζ . Quando la neve è in movimento l'asse ζ è preso normale alla superficie del pendio, Ξ diretto come il vettore velocità al fondo, H ortogonale ai precedenti e quindi, in generale, non tangente al fondo (si veda Fig. 2). Quando la massa è ferma si pone Ξ coincidente con la proiezione sul pendio della linea di massima pendenza della superficie libera della massa nevosa.

Nell'ipotesi di scivolamento al fondo, definito δ l'angolo d'attrito al fondo, risulta

$p_{\zeta\xi} = -\tan\delta p_{\zeta\zeta} = K_{\zeta H} p_{\zeta\zeta}$ dove il segno - è conseguenza del fatto di considerare positivi gli sforzi normali di trazione sulla neve. Supponendo che si abbia rottura all'interno dell'ammasso si ottiene inoltre che:

$p_{\Xi\xi} = k_{ap} p_{\zeta\zeta} = K_{\Xi\xi} p_{\zeta\zeta}$ dove:

$$\left. \begin{matrix} k_p \\ k_a \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\cos^2 \phi} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \delta}} \right] - 1 \quad \text{per } \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Nel riferimento scelto, il cerchio di Mohr tangente all'involuppo di rottura è quello che descrive lo stato di sforzo nel piano $\Xi\zeta$. Ne consegue che la direzione H è una direzione principale, per cui $p_{\Xi H} = K_{\Xi H} p_{\zeta\zeta} = 0$, $p_{H\Xi} = K_{H\Xi} p_{\zeta\zeta} = 0$ e $p_{\zeta H} = K_{\zeta H} p_{\zeta\zeta} = 0$, $p_{H\zeta} = K_{H\zeta} p_{\zeta\zeta} = 0$. Inoltre p_{HH} sarà certamente compresa tra la tensione principale massima e la tensione principale minima del cerchio tangente all'involuppo di rottura. Nella teoria di Hutter (Hutter et al., 1993), si assume p_{HH} pari alla tensione principale massima o minima a seconda del segno di $\partial U_H / \partial H$.

In condizioni di spinta attiva, cioè per $\partial U_{\Xi} / \partial \Xi > 0$:

$$p_{HH} = \frac{1 \pm \sin \phi}{\cos^2 \phi} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \delta}} \right] p_{\zeta\zeta} = K_{HH} p_{\zeta\zeta} \quad \text{per } \frac{\partial U_H}{\partial H} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \quad (8)$$

In condizioni di spinta passiva, cioè per $\partial U_{\Xi} / \partial \Xi < 0$:

$$p_{HH} = \frac{1 \pm \sin \phi}{\cos^2 \phi} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \delta}} \right] p_{\zeta\zeta} = K_{HH} p_{\zeta\zeta} \quad \text{per } \frac{\partial U_H}{\partial H} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Ci sono altre possibili scelte nella definizione di p_{HH} che verranno descritte in seguito nell'articolo e confrontate con quella della teoria di Hutter.

A questo punto si fa l'ipotesi che $p_{\zeta\zeta}$ sia distribuita linearmente non lungo la normale al fondo, ma lungo la verticale. Come è evidente dall'equazione (5), tale ipotesi è corretta fintantoché la curvatura, la pendenza del fondo, lo spessore del manto nevoso ed il campo di velocità possono essere ritenuti costanti su aree di dimensioni confrontabili con la proiezione sul fondo dell'altezza verticale del manto nel punto considerato. Naturalmente all'aumentare della pendenza l'estensione di tali aree cresce e l'approssimazione diviene sempre più grossolana. Va inoltre ricordato che la distribuzione idrostatica delle pressioni è stata ricavata nell'ipotesi di "acque basse", vale cioè finché la variabilità delle grandezze che caratterizzano il campo di moto si concentra lungo la direzione normale al fondo, mentre è limitata nelle direzioni trasversali.

Si aggiunge inoltre l'ipotesi che non solo la componente $p_{\zeta\zeta}$, ma tutte le componenti del tensore degli sforzi sono distribuite linearmente lungo la verticale e che quindi lungo tutto il profilo verticale del manto nevoso le componenti del tensore degli sforzi sono proporzionali a $p_{\zeta\zeta}$. Sull'intera altezza del manto nevoso lo stato di sforzo rimane tangente all'involuppo di rottura, nelle medesime condizioni che si realizzano al fondo.

Il tensore degli sforzi al fondo \mathbf{P} nel riferimento assoluto viene ricavato applicando al tensore così ottenuto la trasformazione che descrive la rotazione da $\Xi H \zeta O$ a $xyzO$, ed avrà una forma del tipo $\mathbf{P} = \rho A \mathbf{K} (f(x, y, t) - z)$ dove \mathbf{K} rappresenta la matrice dei coefficienti di spinta.

Le equazioni del moto mediate sulla verticale.

Si definiscono le componenti del vettore velocità mediate sulla verticale

$$U_x = \left(\int_0^H u_x dz \right) / H \quad \text{e} \quad U_y = \left(\int_0^H u_y dz \right) / H \quad (10)$$

dove H rappresenta lo spessore verticale del manto nevoso. Dall'integrazione dell'equazione di continuità in direzione verticale, richiamando le condizioni al contorno di tipo cinematico, si ottiene:

$$H_{,t} + (H U_x)_{,x} + (H U_y)_{,y} = 0 \quad (11)$$

L'operazione di media sulle equazioni di conservazione della quantità di moto nelle direzioni x e y viene eseguita nell'ipotesi di dipendenza lineare del tensore degli sforzi da z e di profilo uniforme delle velocità lungo la verticale, ed imponendo le condizioni al contorno di tipo cinematico in superficie libera ed al fondo. In realtà l'ipotesi di plug-flow vale in direzione normale al fondo. Se la pendenza non è elevata ed il campo di moto non presenta una forte variabilità spaziale, si può assumere che anche lungo la verticale il vettore velocità sia costante.

$$\begin{aligned} \frac{dU_x}{dt} = & U_{x,t} + U_x U_{x,x} + U_y U_{x,y} = \left((k_{xx,x} + k_{yx,x}) A + k_{xx} A_{,x} + k_{yx} A_{,y} \right) \frac{H}{2} + \\ & + (k_{xx} H_{,x} + k_{yx} H_{,y}) A + (k_{xx} b_{,x} + k_{yx} b_{,y} - k_{zx}) A \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_y}{dt} = & U_{y,t} + U_x U_{y,x} + U_y U_{y,y} = \left((k_{xy,x} + k_{yy,x}) A + k_{xy} A_{,x} + k_{yy} A_{,y} \right) \frac{H}{2} + \\ & + (k_{xy} H_{,x} + k_{yy} H_{,y}) A + (k_{xy} b_{,x} + k_{yy} b_{,y} - k_{zy}) A \end{aligned} \quad (13)$$

Il modello numerico.

Per integrare nel tempo le equazioni mediate sulla verticale è stato utilizzato uno schema lagrangiano alle differenze finite. La massa nevosa è stata discretizzata con un numero finito di elementi prismatici verticali a base triangolare. La velocità è definita ai vertici mobili delle celle, la cui posizione viene aggiornata istante per istante. La conservazione della massa è ottenuta imponendo che il volume di ciascun elemento si mantenga costante. Al generico istante l'altezza verticale H di ogni cella viene ottenuta dividendo il volume associato alla cella per l'area della base triangolare. I valori della velocità sono ottenuti integrando le equazioni di conservazione della quantità di moto in x e y con lo schema di Collatz a due passi (Stoer e Burlisch, 1983). Si impone una condizione di stabilità alla Courant riducendo l'intervallo di tempo Δt in modo tale che le informazioni trasferite dalle caratteristiche non raggiungano triangoli non adiacenti al vertice di calcolo. Il permanere di instabilità numeriche in presenza di shock ha reso necessario l'inserimento di un termine diffusivo nelle equazioni del moto relative alle direzioni x e y . Il codice di calcolo è stato realizzato in C++ e fa ricorso alla libreria P2MESH per gestire la mesh a maglie triangolari (Bertolazzi e Manzini, 2000). Una descrizione dettagliata del modello si trova in De Toni et al..

VERIFICHE SPERIMENTALI DEL MODELLO.

La verifica del modello numerico bidimensionale, è stata eseguita confrontando tra loro i dati ottenuti da prove sperimentali di slump su piano orizzontale ed inclinato con i risultati delle simulazioni numeriche del medesimo fenomeno.

Slump su piano orizzontale.

Le prove di slump su piano orizzontale sono state realizzate su di un piano in forex, largo 150 cm e lungo 159 cm (si veda Fig. 3). I lati corti del piano in forex sono chiusi da due sponde in legno. L'acquisizione dei dati di altezza dell'ammasso viene eseguita con un idrometro a punta, provvisto di nonio, che consente di ottenere misure precise al decimo di millimetro. L'idrometro può scorrere lungo un'asta millimetrata, disposta trasversalmente al piano e appoggiata, alle sue estremità, su due sponde in perspex, alte 9.5 cm, alle quali sono state



Fig. 3: Apparato sperimentale per le prove su piano orizzontale.

Fig. 3: Laboratory apparatus for experiments on the horizontal plane.



Fig. 4: Apparato sperimentale per le prove su piano inclinato.

Fig. 4: Laboratory apparatus for experiments on the inclined plane.

applicate delle scale millimetrata adesive. Spostando le estremità dell'asta lungo le sponde in perspex vengono individuate le varie sezioni di misura. Per il contenimento iniziale del materiale, si sono utilizzate due diverse forme tronco coniche in acciaio, a base circolare, alte 20 cm, che presentano un'apertura superiore di 10 cm di diametro, attraverso cui vengono riempite con il materiale granulare. Il raggio della base inferiore dei due coni è pari a 21.8 cm e 28.85 cm, corrispondente ad un'inclinazione della superficie laterale rispetto alla base di 40° e 50°. Il sollevamento rapido del cono in cui viene collocato il materiale granulare è attuato tramite un pistone ad aria compressa. Le prove di slump sono state eseguite con un materiale granulare, derivato da zeoliti sintetiche, costituito da particelle di forma pressoché sferica, di granulometria compresa tra 0.1 mm e 2 mm e diametro medio di 1 mm. Il materiale è lo stesso utilizzato da D'Accordi (D'Accordi, 1999) nelle prove quasi - statiche svolte per la verifica del modello monodimensionale. Il valore dell'angolo d'attrito interno statico ϕ stimato da D'Accordi è di 28°. L'angolo d'attrito al fondo è stato misurato con una scatola di taglio. E' stato stimato un valore di 22° con uno scarto quadratico medio di 0.8°. Si è osservato che, per gli esperimenti eseguiti con il cono a 50°, i migliori risultati numerici vengono ottenuti con $\phi=28^\circ$ e $\delta=22^\circ$, cioè i valori statici misurati. Invece con il cono avente le falde a 40° i valori ottimali di ϕ e δ sono risultati pari a 24° e 18°, di 4° inferiori rispetto ai valori statici e corrispondenti pertanto ai

valori dinamici (Hungr e Morgenstern, 1984).

Il modello numerico non riproduce esattamente la forma del deposito come evidenziato da Fig. 5 e 6. Va osservato comunque che l'ipotesi di "acque basse" non è rispettata in questo caso in quanto $\varepsilon=Hs/Ls=1$ e in tali condizioni l'effetto di ϕ è rilevante (si veda Fig. 5): al crescere di ϕ aumenta la capacità del materiale di autosorreggersi. Incrementando δ invece si riscontra un maggiore effetto di spargimento del materiale sul piano, dovuto all'aumento del coefficiente di spinta attiva (Fig. 6).

Prove di laboratorio su piano inclinato.

La superficie di scorrimento è stata realizzata tramite due piani inclinabili in forex, di dimensioni di 150 cm x 159 cm, incernierati lungo il lato corto (si veda Fig. 4). Il materiale granulare, costituito anche in questo caso da zeoliti, veniva rilasciato sul piano a pendenza maggiore con i due coni utilizzati per le prove di slump su piano orizzontale. Il deposito è stato rilevato per sezioni trasversali con passo di 10 cm in direzione trasversale e di 5 cm e 10 cm, rispettivamente sul piano orizzontale e su quello inclinato, in direzione longitudinale. In Tab. 1 sono descritti i dati geometrici caratteristici delle prove eseguite su piano inclinato. α è la pendenza del piano, X_c e Y_c le coordinate orizzontali del centro e R il raggio della base inferiore del cono, β l'inclinazione delle falde rispetto al piano basale. Risulta evidente dalla tabella che non era semplice riprodurre esattamente nelle diverse prove le stesse condizioni iniziali. Nonostante questo le prove si sono dimostrate ripetibili ed i massimi errori (non superiori ai 5 cm sul piano) sono stati rilevati nella valutazione del fronte e della coda del deposito finale, per le prove 6, 7 e 8 in cui la pendenza del piano di arresto è di 22°, pari all'angolo d'attrito al fondo in condizioni dinamiche. In tali condizioni era difficile definire la posizione del bordo dell'ammasso e, a causa della bassa inerzia della massa in movimento, si sono manifestati sul fronte dell'ammasso in movimento degli effetti di fingering, evidenziati

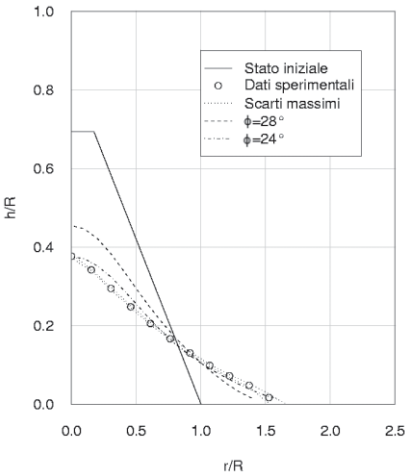


Fig. 5: Confronto dei risultati numerici ($\delta=18^\circ$) coi dati sperimentali delle prove di slump eseguite con il cono di raggio $R=21.8\text{cm}$.

Fig. 5: Comparison between numerical ($\delta=18^\circ$) and experimental shape of the deposit obtained with the cone having $R=21.8\text{cm}$.

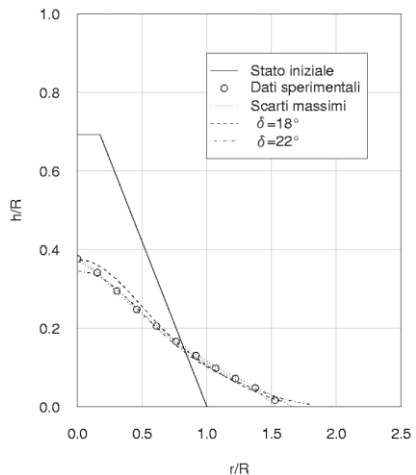


Fig. 6: Confronto dei risultati numerici ($\phi=24^\circ$) coi dati sperimentali delle prove di slump eseguite con il cono di raggio $R=21.8\text{cm}$.

Fig. 6: Comparison between numerical ($\phi=24^\circ$) and experimental shape of the deposit obtained with the cone having $R=21.8\text{cm}$.

Tab. 1: Valore dei parametri geometrici che definiscono la configurazione iniziale delle prove realizzate su piano inclinato.

Tab. 1: Geometric parameters of the initial conditions for experiments on the inclined plane.

Prova	α [°]	Xc [mm]	Yc [mm]	R [mm]	β [°]
2	27	-781	701	288.5	40
3	27	-777	700	288.5	40
4	27	-856	715	218	50
5	27	-848	715	218	50
6	22	-882	715	218	50
7	22	-887	720	218	50
8	22	-896	710	218	50

Tab. 2: Valori dei parametri significativi utilizzati nelle diverse simulazioni numeriche della prove 2 4 e 6. Nt è il numero di triangoli della griglia di calcolo. Δt è il passo temporale.

Tab. 2: Values of parameters for numerical tests of experiments n°2, 4 and 6. Nt is the number of triangles of the mesh. Δt is the time interval.

Prova	Caso	ϕ [°]	δ [°]	Nt	Δt [s]
2	1	28	20.5	218	0.0001
4	1	28	20.5	218	0.0001
4	1	24	10.5	218	0.0001
6	1	28	20.5	317	0.001
6	3	28	22	317	0.001
6	4	28	18	226	0.001

dalla forma lobata del deposito finale (si veda Fig. 7). In Fig. 9, con riferimento alla prova 6, si osserva come varia la forma del deposito finale al variare dell'angolo d'attrito al fondo δ , posto $\phi = 28^\circ$. E' difficile dire quale è la simulazione che fornisce i risultati migliori. Per $\delta = 20.5^\circ$ si ottiene una miglior rappresentazione della forma della coda. La simulazione ottenuta ponendo $\delta = 22^\circ$ riproduce meglio il fronte. Il caso 3 rappresenta bene la configurazione allungata che aveva la coda nel deposito finale subito dopo l'esecuzione della prova. La forma

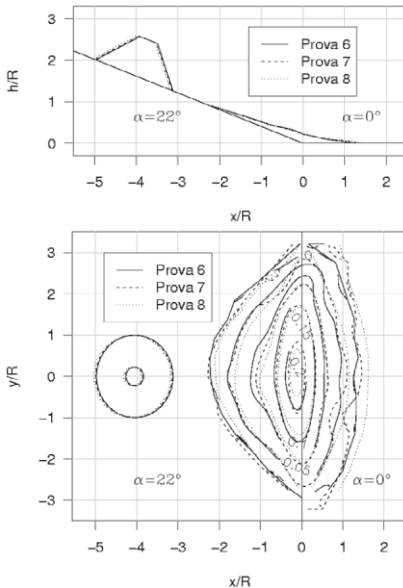


Fig. 7: Confronto delle configurazioni iniziali e dei depositi finali per le prove 6, 7 e 8.

Fig. 7: Comparison between initial configurations and final deposits in experiments 6, 7 and 8.

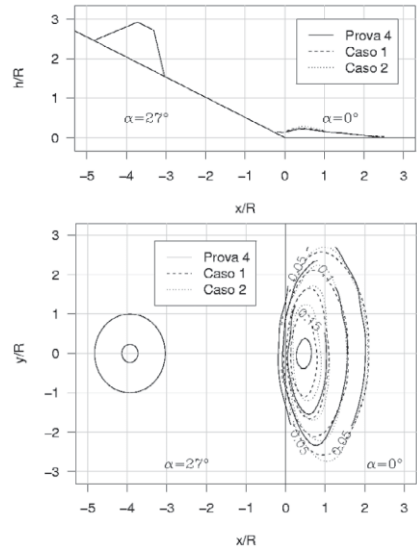


Fig. 8: Confronto tra i dati sperimentali e le soluzioni numeriche al variare di ϕ , posto $\delta = 20.5^\circ$, per la prova 4 (Tab. 2).

Fig. 8: Comparison between experimental and numerical results with $\delta = 20.5^\circ$, varying ϕ , in experiment n°4 (Tab. 2).

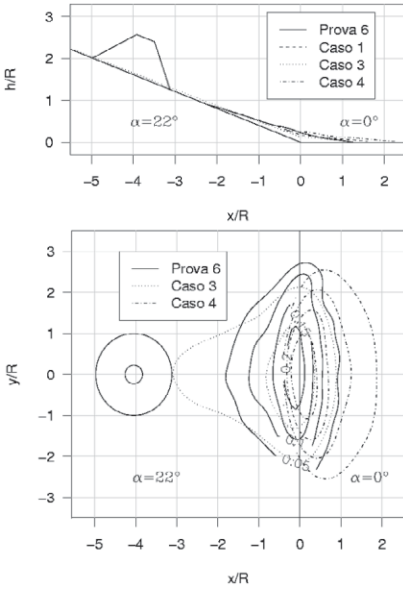


Fig. 9: Confronto tra i risultati sperimentali e le soluzioni numeriche, al variare di δ , posto $\phi = 28^\circ$ per la prova 6 (Tab. 2).

Fig. 9: Comparison between experimental and numerical results, with $\phi = 28^\circ$, varying δ , in experiment n°6 (Tab. 2).

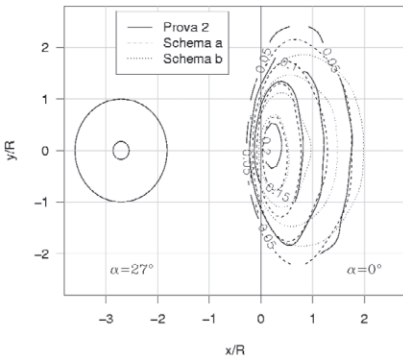


Fig. 10: Confronto tra le soluzioni numeriche ottenute con diversi schemi di calcolo del coefficiente di spinta K_{HH} (si veda Tab. 3). I parametri del modello numerico sono quelli del caso 1 per la prova 2 (Tab. 2).

Fig. 10: Comparison between numerical results for different approaches in the estimate of pressure coefficient K_{HH} (Tab. 3). The values of numerical parameters are the ones of case 1 in experiment 2 (Tab. 2).

Tab. 3: Schemi di valutazione del coefficiente di spinta trasversale K_{HH} .

Tab. 3: Various estimates for the transversal pressure coefficient K_{HH} .

Schema	Descrizione
A	K_{HH} è assunto sempre pari al centro del cerchio di Mohr Secondo l'approccio di Hutter (Hutter, 1993) K_{HH} è posto pari a K_1 o K_3 , cioè alla tensione principale massima o minima, in base al segno di $\partial U_H / \partial H$
B	si assume K_{HH} sempre pari a K_1 , corrispondente alla tensione principale massima.
C	si pone K_{HH} pari al coefficiente di spinta attiva o passiva (Eq. 7)
D	calcolato nella direzione del moto, in base al segno del gradiente trasversale di U_H .

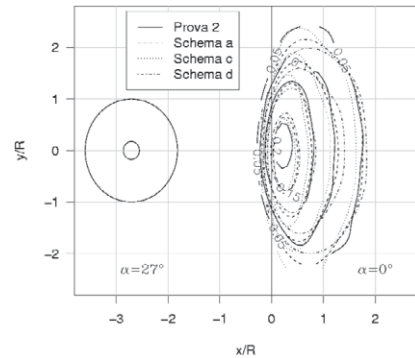


Fig. 11: Confronto tra le soluzioni numeriche ottenute con diversi schemi di calcolo del coefficiente di spinta K_{HH} (si veda Tab. 3). I parametri del modello numerico sono quelli del caso 1 per la prova 2 (Tab. 2).

Fig. 11: Comparison between numerical results for different approaches in the estimate of pressure coefficient K_{HH} (Tab. 3). The values of numerical parameters are the ones of case 1 in experiment 2 (Tab. 2).

del deposito si è poi assestata molto lentamente portandosi verso la configurazione finale, che è stata poi quella rilevata. In Fig. 8 vengono confrontati risultati sperimentali e numerici per la prova 4. In particolare si analizza l'effetto dell'angolo d'attrito interno ϕ sul comportamento del modello numerico, posto $\delta = 20.5^\circ$. Si nota come riducendo l'angolo ϕ dal valore statico di 28° al valore dinamico di 24° il deposito risulti più avanzato, più alto e più largo. Le differenze comunque sono minime e confrontabili con gli errori sperimentali. L'angolo d'attrito interno ϕ influisce minimamente sul comportamento del modello numerico, nei casi in cui i termini inerziali diventano dominanti nell'equazione del moto. Le simulazioni numeriche descrivono con una buona accuratezza la posizione del punto di massimo, del fronte e della coda. E' invece maggiore l'errore commesso nella stima dell'allargamento dell'ammasso e quindi dell'altezza massima dello stesso.

Vengono riprodotti con una certa fedeltà i cambiamenti di concavità nel profilo del deposito. Tutte le simulazioni numeriche finora presentate sono state eseguite rappresentando la tensione principale in direzione trasversale al moto secondo lo schema proposto da Hutter (Hutter et al., 1993) e cioè assumendo $K_{HH} = K_2$ pari a K_1 (coefficiente di spinta massimo) o K_3 (coefficiente di spinta minimo) a seconda che i gradienti trasversali della componente trasversale di velocità siano positivi o negativi. Sono state fatte delle prove, utilizzando diversi schemi per la descrizione del coefficiente di spinta trasversale, elencati in Tab. 3, e confrontando poi i risultati delle simulazioni numeriche con i dati sperimentali relativi alla prova 2. Come si osserva in Fig. 10 assumendo K_{HH} sempre pari al valore corrispondente al centro del cerchio di Mohr, la massa tende ad espandersi maggiormente in direzione trasversale. Questo è dovuto al fatto che in direzione trasversale si è sempre in condizione di spinta attiva durante la fase di arresto, per cui secondo l'approccio di Hutter si avrebbe K_{HH} pari al coefficiente di spinta minimo. In Fig. 11 si osserva come lo schema c sia quello che meglio descrive lo spargimento trasversale della massa, utilizzando, come valore di K_{HH} , sempre quello corrispondente alla tensione principale massima. Lo schema d, che prevede di utilizzare i valori dei coefficienti di spinta attiva e passiva relativi alla direzione del moto in base al segno del gradiente trasversale della velocità trasversale, non dà luogo a dei miglioramenti significativi nella stima della geometria del deposito. Non sono state trovate delle giustificazioni teoriche all'utilizzo di uno schema piuttosto di un altro. Si pone quindi un problema di taratura. Indicazioni più significative potrebbero venire dall'applicazione del modello numerico a casi caratterizzati da brusche variazioni di direzione.

CONCLUSIONI.

Dall'analisi delle simulazioni numeriche di prove sperimentali eseguite su piano orizzontale e su piano inclinato, si trae una sostanziale conferma dell'efficacia dell'estensione a due dimensioni della teoria di Hutter e Savage.

Ci sono vari parametri che influenzano i risultati numerici in condizioni dinamiche. Tra questi la forma e i rapporti tra spessore, larghezza e lunghezza dell'ammasso, nelle condizioni iniziali. L'azione di tali parametri si esplica soprattutto nelle fasi di avvio e di scorrimento, meno in quella di arresto. L'angolo d'attrito al fondo δ influisce sulla forma, sulle velocità di scorrimento e sulla distanza di arresto. Dalla risoluzione con cui è definito il pendio dipendono i valori di curvatura e quindi le pressioni normali e le azioni frenanti che si sviluppano al fondo.

Lo schema numerico ha evidenziato dei limiti. Il rispetto della condizione di contiguità tra le celle, che costituiscono la griglia di calcolo, preclude al modello la possibilità di rappresentare processi in cui intervengono variazioni di massa, quali erosioni, depositi o separazione della

valanga in più corpi, in seguito all'interporsi di ostacoli lungo il percorso. Dovendo essere garantita la condizione di aderenza al suolo, il modello non è in grado di trattare i salti di fondo. Vi sono problemi di instabilità, dovuti alla degenerazione della mesh, specie in situazioni in cui forti velocità si combinano a geometrie del fondo rapidamente variabili. Trattando la neve come un mezzo incomprimibile, non viene riprodotto l'iniziale processo di fluidizzazione, che comporta un incremento del volume dell'ammasso e un'alterazione del comportamento reologico del materiale.

Per sviluppare il modello è ora necessario testare ulteriormente la validità delle ipotesi reologiche introdotte nel modello bidimensionale, attraverso la realizzazione di prove di laboratorio. Può essere significativo applicare il modello numerico nella riproduzione di prove di arresto, deviazione, allargamento e restringimento. In tali condizioni diverranno ancora più importanti i problemi di degenerazione della mesh. Si sta verificando la percorribilità di nuovi schemi di integrazione delle equazioni di tipo "meshless" che, trattando le equazioni scritte in forma debole, dovrebbero essere in grado di rappresentare "shock" e anche separazioni di massa (Liu, 2003; Dilts, 1999; Dilts, 2000). Le distorsioni, introdotte dall'ipotesi di idrostaticità delle pressioni in direzione verticale, possono essere attenuate scrivendo le equazioni del modello in un riferimento cartesiano ortogonale di coordinate x , y e z , in cui il piano xy approssimi al meglio la superficie del pendio, nel modo di Hutter (Hutter et al., 1993), specie nella zona di arresto.

BIBLIOGRAFIA

- Savage, S. B., Hutter, K. (1991): "The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: analysis" *Acta Mechanica*, Vol. 86, 201 – 223.
- Hutter, K. and Siegel, M. and Savage, S.B. and Nohguchi, Y. (1993): "Two dimensional spreading of a granular avalanche down an inclined plane. Part I. Theory" *Acta Mechanica*, Vol. 100, 37 – 68.
- D'Accordi, M. (1999): "Studio di un sito valanghivo: dati di campo e modellazione numerica". *Tesi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio*, a.a.1998-99, Università degli Studi di Trento.
- Simmonds, J.G. (1982): "A Brief on Tensor Analysis", Springer Verlag.
- Hungr, O., Morgenstern, N.R. (1984): "Experiments on the flow behaviour of granular materials at high velocity in an open channel", *Geotechnique*, Vol. 34, No.3, 405 - 413
- De Toni, S., Scotton, P., Bertolazzi, E., "Modello Matematico e Numerico Bidimensionale per lo Studio delle Valanghe di Neve Densa", *Quaderni del Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale*, Università degli Studi di Trento, in stampa.
- Stoer, S., Burlisch, R. (1983): "Introduction to numerical analysis", Springer Verlag.
- Bertolazzi, E., Manzini, G., (2000), "P2MESH: a collection of generic classes for PDE solvers on unstructured 2-D grids",
<http://www.unitn.it/~bertolaz/p2mesh/download.shtml>.
- Liu, G.R. (2003): "Mesh Free Methods. Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press.
- Dilts, G.A. (1999): "Moving – Least – Square – Particle Hydrodynamics – I. Consistency and Stability", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, 1115 – 1155.
- Dilts, G.A. (2000): "Moving least-squares particle hydrodynamics II: conservation and boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, 1503 – 1524.